

# 離散ガウス波形による 2 次元 BPSK 信号の時間周波数対称性について

## Time Frequency Symmetry property of 2-dimentional BPSK signal using discrete gaussian wave

大橋 正良\*

Masayoshi Ohashi

香田 徹†

Tohru Kohda

**Abstract**— ガウス波形による時間、周波数軸に亘って拡散された信号は、時間信号、周波数信号間で完全な対称性を有し、時間・周波数のずれがあった場合でも、効率的に両者を ML で推定できることが香田、實松によって提案され、特性が明らかにされてきた。本稿は特に離散信号に対して信号を生成し、レーダにおける、遅延、ドップラー推定演算が効率的に行えること明らかにするとともに、実用における制約・課題を整理する。

**Keywords**— Spread Spectrum, Gaussian wave, TFS, radar

### 1 はじめに

ワイヤレス伝送に伴って発生する遅延  $t_d$ 、ドップラー  $f_D$  の推定は、レーダの基本問題であるとともに通信同期や伝送路推定上も重要な課題である。レーダ技術の分野では、これらの推定のために CW レーダ、FM/CW レーダ、パルスレーダあるいは UWB レーダが用いられてきている。これらはいずれも受信信号と送信信号の差分から  $t_d, f_D$  を推定するものであるが、2 変数を同時に探索して最尤推定を実施しようとする、その演算量は膨大となる。

この問題に対して、實松、香田らは、Gabor Division[1] に基づく時間、周波数の両方向に対して拡散され、かつ時間-周波数対称性 (Time-Frequency Symmetry:TFS) を満たすマルチキャリア化された拡散信号を用いることを提案し [2]、連続信号を対象としてその性質を明らかにしてきた。本稿では、将来の実用化を見据え、デジタル化された離散信号によって拡散信号生成ならびにその特性解析を行った結果を報告する。

### 2 TFS 信号の特徴と提案方式の概要

本稿では [3] をベースにした信号生成を行う。TFS 信号はおおよそ下記のように定義される。

信号  $z(t)$  とその Fourier Transform(FT) を  $Z(f) = \mathcal{F}[z(t)]$  とし、TD (Time Domain), FD (Frequency Domain) での遅延  $\tau$ 、ドップラー  $\nu$  を作用させる演算子を

それぞれ  $\mathcal{T}_{\tau, \nu}, \mathcal{T}_{-\tau, \nu}^f$  とするとき、

$$\mathcal{T}_{-\tau, \nu}^f = \mathcal{F}\mathcal{T}_{\tau, \nu}\mathcal{F}^{-1} \quad (1)$$

が成立することである。通常の時間シフト演算、周波数シフト演算ではこれが満たされないが、以下の shift 演算子

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\tau, \nu} z(t) &= z(t - \tau) e^{j2\pi\nu(t - \frac{\tau}{2})} z(t), \\ \mathcal{T}_{-\tau, \nu}^f Z(f) &= Z(f - \nu) e^{-j2\pi\tau(f - \frac{\nu}{2})} \end{aligned} \quad (2)$$

を定義すると、式 (1) が満たされる。この特徴を生かし、遅延、ドップラーの検出はおおよそ下記のシナリオで実施される [4, 5, 6, 7]。

(i)  $t_d, f_D$  に関して対称性を満たすように TD 信号の他にその FT の FD TFS 信号を用意する。事前情報無しで  $t_d, f_D$  の推定問題 (推定値  $\hat{t}_d, \hat{f}_D$ ) が分離可能となるように、 $f_D$  を変数 ( $\hat{t}_d$  をパラメータ) とする TD 信号の周波数同期問題とその双対 ( $t_d$  を変数 ( $\hat{f}_D$  をパラメータ) とする FD 信号の時間同期問題) とに分解する。

(ii) チップ周期  $T_c$ 、チップ帯域幅  $F_c$  を有するガウス波に対し、時間軸に  $N$  個、周波数軸に  $N'$  個定義される 2 次元 2 値符号  $X_m X_{m'} \in \{-1, 1\}^2$ ,  $0 \leq m \leq N - 1, 0 \leq m' \leq N' - 1$  で TD, FD においてそれぞれ 2 次元位相変調を行って 1 つのシンボルに対応する信号を発生する。これを signature と呼ぶ。従って signature が占める時間は  $T = T_c N$ 、占める周波数は  $F = F_c N'$  となる。生じる位相歪  $e^{\pm j2\pi m T_c m' F_c}$  は同期手掛り (template) となり、これらの線形和をレーダ発射信号とする (後述)。

(iii) 受信側は  $N$  個の template に基づく  $f_D$  推定の TD 相関器 (その frequency dual:  $N'$  個の template に基づく  $t_D$  推定の FD 相関器) からなるアレイ型とする。  $t_d$  と  $f_D$  の推定は、von Neumann's alternative Projection Theorem(APT)[8] に基づく両相関器の最尤値の最大値の交互更新によって行う。この更新結果の収束 ( $T_c, F_c$  の精度) 後 target が検出される。delay-Doppler Space(dDS) の各部分領域付随の独立な 2 次元符号で位相変調した多重化信号によりレーダの測距や無線通信の同期を同時に解決するため、発射信号は、ガウスパルスを周期

\* 〒 814-0180 福岡市城南区七隈八丁目 19 番 1 号 福岡大学工学部電子情報工学科, Department of Electronics Engineering and Computer Science, Faculty of Engineering, Fukuoka University, 19-1, Nanakuma 8-Chome, Jonan-ku, Fukuoka, 814-0180 Japan. E-mail: mohashi@fukuoka-u.ac.jp

† 九州大学 名誉教授 E-mail: torukoda81@wind.ocn.ne.jp

$N$  の TD 符号で位相変調 (Spreading Spectrum(SS) 変調) した信号を  $N'$  個の carrier で周波数変調し FD 符号で位相変調 (BPSK) した信号の和であるので, 凡そ数 10MHz-数 GHz の広帯域信号となる. この点, 本提案方式は, Multicarrier を使用する OFDM や Filter Bank Multicarrier(FBMC), TD の SS 変調を行う CDMA や GPS, 周波数ホッピングする Bluetooth と類似点があるが,

- $N, N'$  個の位相歪補償付き TD, FD 相関器アレイを用いる点,
- 無情報で TD, FD 相関器の一方の argMax で最尤値の最大値で他方の  $\hat{t}_d, \hat{f}_D$  を交互更新するアルゴリズム等を必要とする点

で新たなデジタル多重通信方式になっている.

本稿ではこのシナリオのうち送信側 (i),(ii) を対象に信号の発生・検証を行う.

### 3 Signature の生成 (連続信号)

発射信号を

$$s(t) = \Re[\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}] \quad (3)$$

とする. ただし,  $\tilde{s}(t)$  は複素ベースバンド信号,  $f_c$  が搬送波周波数である. 先ず,  $\tilde{s}(t)$  を時間幅  $T$ , 周波数帯域  $F$  の測距容易な signature  $v(t)$  の複素ベースバンド信号  $\tilde{v}(t)$  で Gabor 展開する.

$$\tilde{s}(t) = \sum_{q=0, q'=0}^{P-1, P'-1} d_{q, q'} \tilde{v}(t - qT : \mathcal{X}) e^{j2\pi q' F (t - \frac{qT}{2})}. \quad (4)$$

ただし,  $d_{q, q'}$  は address( $q, q'$ ) の 2 値データ (データ数は  $P \times P'$ ), 指数関数肩部の時間シフト  $-\frac{qT}{2}$  は (簡単のため  $f_c = 0$  とおいて), 受信信号

$$r(t) = \Re[\alpha e^{j\varphi} \sum_{q=1, q'=1}^{P, P'} d_{q, q'} e^{j\pi(qT f_d - q' F t_d)} \cdot v(t - qT - t_d) \cdot e^{j2\pi(q' F + f_D)(t - \frac{qT + t_d}{2})} + \tilde{\xi}(t)] \quad (5)$$

とその FT:  $R(f) = \mathcal{F}[r(t)]$  間で  $t_d, f_D$  に関する TFS が成立するための位相調整項である. ただし  $\alpha, e^{j\varphi}$  は, 伝送路での減衰ならびに位相シフト,  $\tilde{\xi}(t)$  は伝送路上で付加される雑音項である. 以後紛れの無い限り複素ベースバンド信号を表す記号  $\tilde{\cdot}$  を省略する.  $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$ ,  $\mathbf{X}' = (X'_0, X'_1, \dots, X'_{N'-1})$  を TD, FD 符号とし,  $\mathcal{X} = (\mathbf{X}, \mathbf{X}')$  と記す.

次に,  $v(t), V(f)$  を各々

$$g_{n, n'}(t) = g(t - nT_c) e^{j2\pi n' F_c t}, \quad G_{n, n'}(f) = \mathcal{F}[g_{n, n'}(t)] \quad (6)$$

で以下のように Gabor 展開する.

$$v(t; \mathcal{X}) = \frac{1}{\sqrt{NN'}} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N'-1} X_m X'_{m'} g_{m, m'}(t) \cdot e^{-j\pi m m' T_c F_c},$$

$$V(f; \mathcal{X}) = \frac{1}{\sqrt{NN'}} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{m'=0}^{N'-1} X_m X'_{m'} G_{m, m'}(f) \cdot e^{-j\pi m m' T_c F_c}. \quad (7)$$

$v(t; \mathcal{X}), V(f; \mathcal{X})$  の見通しの良い表示と各々の分解

$$v(t; \mathcal{X}) = \frac{1}{\sqrt{N'}} \sum_{m'=0}^{N'-1} X'_{m'} \mathcal{T}_{0, m' F_c} u_{m'}^{\text{TD}}(t; \mathbf{X}),$$

$$V(f; \mathcal{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \mathcal{T}_{-m T_c, 0}^f U_m^{\text{FD}}(f; \mathbf{X}') \quad (8)$$

が得られる. ただし,

$$u_{m'}^{\text{TD}}(t; \mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{-j\pi m m' T_c F_c} \mathcal{T}_{m T_c, 0} g(t), \quad 0 \leq m' \leq N' - 1, \quad (9)$$

$$U_m^{\text{FD}}(f; \mathbf{X}') = \frac{1}{\sqrt{N'}} \sum_{m'=0}^{N'-1} X'_{m'} e^{j\pi m m' T_c F_c} \mathcal{T}_{0, m' F_c}^f G(f), \quad 0 \leq m \leq N - 1 \quad (10)$$

は各々 TD, FD template である.

### 4 離散信号による Signature 生成

前章で記した信号を離散スキームに置き換え, 同期取得容易な signature を設計する.

離散信号のサンプリング周期を  $\Delta t$  とする. 対応するサンプリング周波数は  $f_c = \Delta t^{-1}$  となる. 離散周波数信号は  $L$  点の DFT によって得られるとすると, 波形の継続時間は  $L\Delta t$  より, FD 上での周波数の最小間隔  $\Delta f$  は,  $\Delta f = 1/(L\Delta t)$  となる. template におけるチップ周期を  $T_c = M\Delta t$ , チップ帯域を  $F_c = M'\Delta f, F_c = 1/T_c$  を仮定すると,  $L = (\Delta t \Delta f)^{-1} = MM'$ . これに伴い twiddle factor  $W = e^{-\frac{j2\pi}{L}}$  が定義される. 離散時間  $k$  ならびに離散周波数  $\ell$  は,  $k = \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor, \ell = \lfloor \frac{f}{\Delta f} \rfloor$  となる.

離散信号 template は, パルス波  $g(t)$  の離散信号  $g[k]$  を拡散比  $N, N'$  の 2 次元拡散符号  $\mathcal{X} = (\mathbf{X}, \mathbf{X}'), \mathbf{X} = \{X_n\}_{n=1}^N, \mathbf{X}' = \{X'_{n'}\}_{n'=1}^{N'}$  で変調多重化した信号

$$v[k; \mathcal{X}] = \frac{1}{\sqrt{NN'}} \sum_{m, m'=0}^{N-1, N'-1} X_m X'_{m'} \mathcal{T}_{m M, m' M'}^d g[k] \quad (11)$$

である.  $v[k; \mathcal{X}]$  の FT は,

$$V[\ell; \mathcal{X}] = \frac{1}{\sqrt{NN'}} \sum_{m, m'=0}^{N-1, N'-1} X_m X'_{m'} \mathcal{T}_{m' M', -m M}^{f, d} G[\ell]. \quad (12)$$

ただし, 上添字 <sup>d</sup> は離散値でのオペレーションを示し,  $G[\ell] = \mathcal{F}^d[g[k]], \mathcal{F}^d$  は DFT,  $Z[\ell] = \mathcal{F}^d[z[k]]$

$= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{\ell=0}^{L-1} z[k] W^{k\ell}$ ,  $\mathcal{F}^{\text{d},-1}$  は IDFT ,  
 $z[k] = \mathcal{F}^{\text{d},-1}[Z[\ell]] = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{\ell=0}^{L-1} Z[\ell] W^{-k\ell}$  を表す .

離散化された TD , FD の対称時間・周波数 shift 演算子は以下の通り .

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a,b}^{\text{d}} z[k] &= z[k-a] W^{-b(k-\frac{a}{2})}, a, b, k \in \mathbb{Z}, \\ \mathcal{T}_{b,-a}^{\text{f,d}} Z[\ell] &= Z[\ell-b] W^{a(\ell-\frac{b}{2})}, a, b, \ell \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (13)$$

式 (8) に対応して  $v[k; \mathcal{X}]$ ,  $V[\ell; \mathcal{X}']$  は次のように書き換えられる .

$$\begin{aligned} v[k; \mathcal{X}] &= \frac{1}{\sqrt{N'}} \sum_{m'=0}^{N'-1} X_{m'} \mathcal{T}_{m',m'}^{\text{d}} u_{m'}^{(3)}[k; \mathbf{X}], \\ V[\ell; \mathcal{X}'] &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X_m \mathcal{T}_{0,-mM}^{\text{f,d}} U_m^{(4)}[\ell; \mathbf{X}']. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで  $u_{m'}^{(3)}[k; \mathbf{X}]$ ,  $U_m^{(4)}[\ell; \mathbf{X}']$  はそれぞれ type-3 の TD template と type-4 の FD-template で ,

$$u_{m'}^{(3)}[k; \mathbf{X}] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} X_m e^{-i\pi m m' M M' \Delta t \Delta f} \mathcal{T}_{mM,0}^{\text{d}} g[k], \quad g[k] = \sqrt{\Delta t} g\left(\left(k - \frac{L-1}{2}\right)\Delta t\right), 0 \leq k \leq L-1 \quad (18)$$

$$0 \leq m' \leq N' - 1,$$

$$U_m^{(4)}[\ell; \mathbf{X}'] = \frac{1}{\sqrt{N'}} \sum_{m'=0}^{N'-1} X_{m'} e^{-i\pi m m' M M' \Delta t \Delta f} \mathcal{T}_{m',0}^{\text{f,d}} G[\ell],$$

$$0 \leq m \leq N - 1.$$

(15)

情報信号  $d_{q,q'} \in \mathbb{Z}, 0 \leq q \leq P-1, 0 \leq q' \leq P'-1$  を埋め込んだ送信ベースバンド信号は ,

$$\begin{aligned} \psi[k; \mathcal{X}] &= \frac{1}{\sqrt{PP'}} \sum_{q=0, q'=0}^{P-1, P'-1} d_{q,q'} \mathcal{T}_{qNM, q'N'M'}^{\text{d}} v[k; \mathcal{X}], \\ \Psi[\ell; \mathcal{X}'] &= \frac{1}{\sqrt{PP'}} \sum_{q=0, q'=0}^{P-1, P'-1} d_{q,q'} \mathcal{T}_{q'N'M', -qNM}^{\text{f,d}} V[\ell; \mathcal{X}'] \end{aligned} \quad (16)$$

離散化された搬送波周波数を  $\ell_c = \lfloor \frac{f_c}{\Delta f} \rfloor$  とすると , 送信信号は ,

$$\begin{aligned} s[k; \mathcal{X}] &= \Re \psi[k; \mathcal{X}] W^{-\ell_c k}, \\ S[\ell; \mathcal{X}] &= \frac{1}{2} (\Psi[\ell - \ell_c; \mathcal{X}] + \Psi^*[-\ell - \ell_c; \mathcal{X}']), \\ \Psi[\ell; \mathcal{X}] &= \mathcal{F}^{\text{d}}[\psi[k; \mathcal{X}]] \end{aligned} \quad (17)$$

となる . \* は複素共役を表す .

## 5 信号波形の設計

### 5.1 チップ波形の設計

Gabor[1] に従いチップ波形はガウス波形を用いる . 本稿では  $g(t) = e^{-\pi t^2}, G(f) = e^{-\pi f^2}$  を TD, FD 間波形に

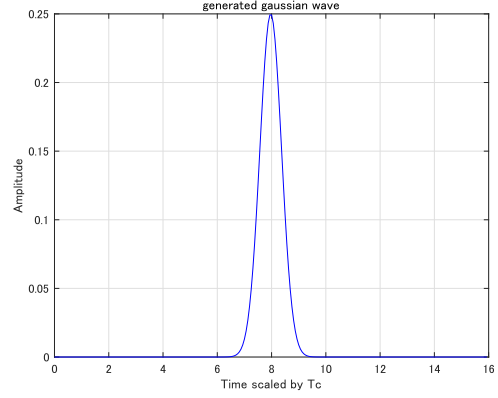


図 1: 生成されたガウス波形 .

用い , 分散を揃えている . 定義時間は  $[-L/2, +L/2]$  であるが , 因果性を担保するため ,  $(L-1)/2$  の時間オフセットを与え ,

として定義する .

例として ,  $M = M' = 16$ , (i.e.  $L = 256$ ) とした際のガウス波形を図 1 に示す . 横軸はチップ周期  $T_c$  を単位とした時間である .

### 5.2 拡散信号の選択

拡散信号として選択する符号  $\mathcal{X} = (\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ ,  $\mathbf{X} = \{X_n\}_{n=1}^N, \mathbf{X}' = \{X'_{n'}\}_{n'=1}^{N'}$  については , i.i.d. であることが要請されるが , 特に決まった最適系列を選ぶ必要までは考えていない . 今回は単純に乱数系列を発生させることとした .

### 5.3 離散化に伴うパラメータ制約

$P = P' = 1$  とする単発 signature で考えると , 折り返し不起きないためにはナイキスト条件として ,  $1/\Delta t \geq 2 \times F$  を満たす必要がある . ガウス波形の裾野を無視しておよそ 1 チップが  $T_c = M\Delta t$  の時間幅 ,  $M'\Delta f$  の帯域幅を有するとすると ,  $2N' < M, 2N < M'$  の制約条件が得られる . これよりおよそ ,  $N'$  は  $M$  の半分以下 ,  $N$  は  $M'$  の半分以下で設計すべきであることがわかる . 一方で  $M, M'$  を増加させると ,  $L (= MM')$  が大きくなり , signature の裾野が広がることを意味する . もし裾野まで考慮すると , 厳密な時間幅は  $T = (L + (N-1)M)\Delta t$ , 周波数帯域は  $F = (L + (N'-1)M')\Delta f$  となり , ナイキスト条件を満たさなくなる . これはエネルギーの僅少な裾野の領域を truncate して考えるべきことを示唆している .

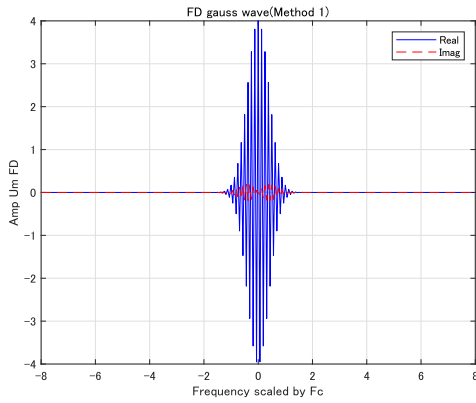


図 2: FD からみたガウス波形 .

## 6 発生波形と対称性の検証

発生波形を順に説明する . 図 2 は図 1 に対応する FD 信号である . 1 チップを構成するガウス時間波形に対応し ,  $G[\ell] = \mathcal{F}^d[g[k]] = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=0}^{L-1} g[k] W^{k\ell}$  の演算によって得られる . 図で実部が激しく振動しているが , これは複素数で見ているためで絶対値はガウス波形である . IFFT 後の波形は図 1 に一致する .

次に時間軸方向に 4 チップ , 周波数方向に 4 チップ ( $N = N' = 4$ ) を有する signature を発生させる . TD, FD 用の拡散符号を ,  $\mathbf{X} = (1, -1, 1, -1)$  ,  $\mathbf{X}' = (1, 1, -1, -1)$  とした . 発生プロセスとして , 式 (15) に従って , 各  $m', 0 \leq m' \leq 3$  に対応した TD 波形を図 3 に , また同式に従って , 各  $m, 0 \leq m \leq 3$  に対応した FD 波形を図 4 に示す .

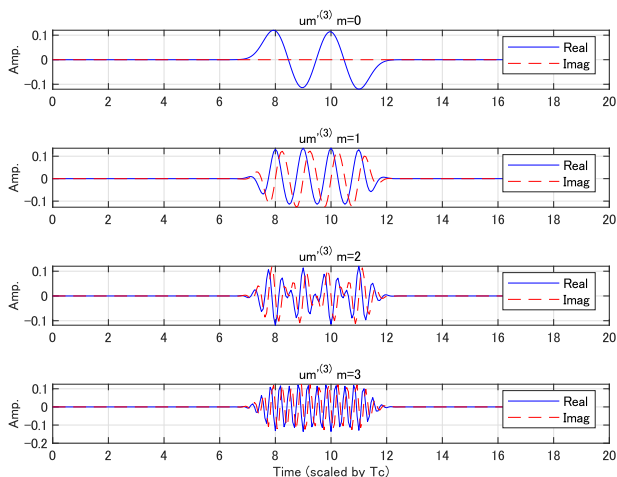


図 3: 式 (15) に従って生成された  $u_{m'}^{(3)}[k; \mathbf{X}]$  波形 .

これらをもとに , 式 (14) に従って生成された TD 拡散信号  $v[k; \mathcal{X}]$  を図 5 に , 同様にして生成された FD 拡散信号  $V[\ell; \mathcal{X}]$  を図 6 に示す .

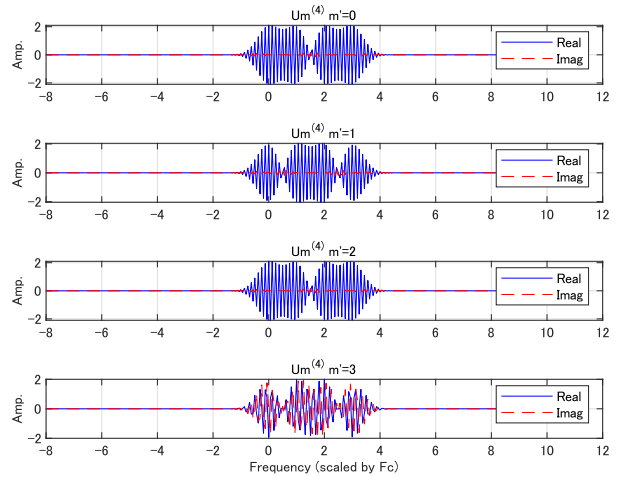


図 4: 式 (15) に従って生成された  $U_m^{(4)}[\ell; \mathbf{X}']$  波形 .

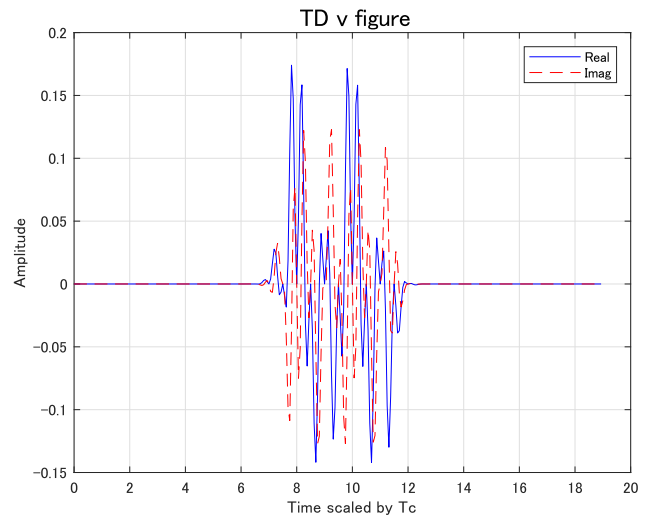


図 5: 式 (14) に従って生成された  $v[k; \mathcal{X}]$  波形 .

図 5, 図 6 はそれぞれ , TD, FD 上で生成されたガウス波形に時間シフト , 周波数シフトを掛けて重ね合わせて生成されたものであるが , この対称性を見るために ,  $v, V$  にそれぞれ FFT, IFFT を掛けて , その差を見たのが図 7, 8 である . 両図とも , 変換波形は  $v, V$  間で完全に一致しており , 差分が全く見られず , 対称性が確保されていることがわかる .

次に TD, FD とともにマルチキャリア CDMA としての性能を検証するため , TD では  $v[k; \mathcal{X}]$  からある  $m'$  に対応する系列を取り出し ,  $v[k; \mathcal{X}]$  からその系列を除いた残りの成分との内積を評価する . FD に対しても同様に  $V[\ell; \mathcal{X}]$  からある  $m'$  に対応する系列を取り出し , 同様に内積を評価する . これはいわゆる複素信号が重畳されたマルチキャリア CDMA 信号の干渉評価である . 図

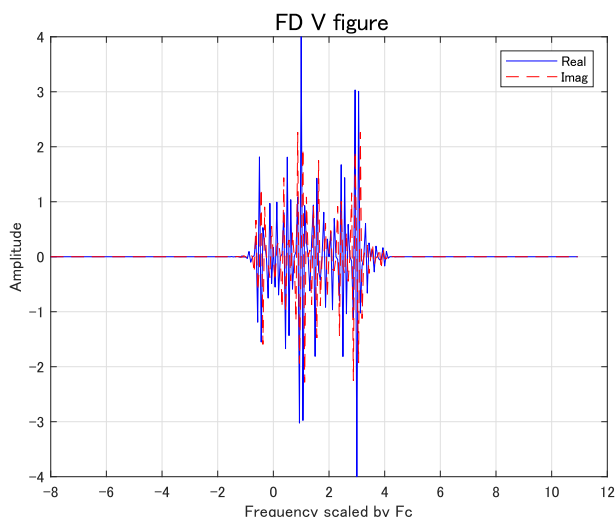


図 6: 式 (14) に従って生成された  $V[l; \mathcal{X}]$  波形 .

9 にその結果を示す . 図は自身の内積値で規格化された値を示している . 十分に低い値となっており , 良い弁別性能を TD, FD 共に持っていることがわかる .

最後に , 若干規模を大きくし ,  $M = M' = 64(L = 4096)$  ,  $N = N' = 32$  で生成した波形を示すとともに ,  $S/N = -5\text{dB}$  を想定した伝送路を通した時間波形を参考までに示す . 雑音の中で若干信号が存在することが確認できる .

## 7 課題

これまで TD, FD 上でベースとなるガウス波形を時間/周波数シフトし , 各信号を重畳して拡散信号を生成してきたが , シフトに伴って生成される総系列長が  $L$  よりも増加する . これにともなう DFT/IDFT での評価は慎重に行う必要があると考えている . 現状はガウス波形の裾野を truncate し , 適切に時間シフト調整によって総系列長を  $L$  に保つことで , 良好な対称性を確認できている . さらにこの後十分な  $t_d, f_D$  の範囲に対して探索を実施すると , TFS を維持しつつシステム定義長を TD, FD に亘って拡張する必要があると考えている .

## 8 おわりに

本稿では , 離散信号を対象に時間周波数対称性を有するスペクトラム拡散信号の設計ならびに対称性の検証を行い , その結果ベースバンド離散信号として所望の対称性が実現されていることがわかった . 次のステップとして , 受信側でのマッチングアルゴリズムを実装して , 遅延 , ドップラーが加わった信号に対して , 両者が精度良く推定できることを検証する予定である . さらには本検討でベースバンド離散信号が得られているので , ソフトウェア無線によって RF 信号を発生し , 実際に遅延やドッ

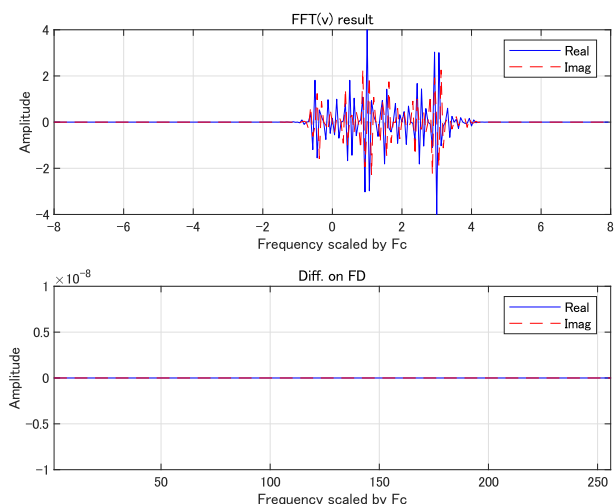


図 7:  $v[k; \mathcal{X}]$  に FFT を掛けた結果  $\text{FFT}(v)$  (上図) , ならびに  $\text{FFT}(v)$  と  $V[l; \mathcal{X}]$  との差分 (下図) .

プラーを加えた信号を受信し , サンプルされたベースバンド信号から同様に推定性能を評価してゆきたいと考えている .

## 謝辞

本検討実施に関し , 絶えずご理解 , ご協力を賜ります九州大学櫻井幸一先生に感謝申し上げます .

## 参考文献

- [1] D. Gabor, "Theory of Communication", in *Proc. Inst. Elect. Engr.*, pt. III, **93**, 429-41, 1946
- [2] T. Kohda, Y. Jitsumatsu, and K. Aihara, "2D Markovian SS codes flatten time-frequency distribution of signals in asynchronous Gabor division CDMA systems, " *2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 2011.
- [3] T. Kohda, " Time-Frequency symmetrical coded signal simplifies joint estimation of delay and doppler, " *Pacific Journal of Mathematics for Industry*, submitted.
- [4] T. Kohda, Y. Jitsumatsu, and K. Aihara, " Frequency synchronisation using SS technique, " *Proc. The ninth Int. Sympo. on Wireless Communication Systems*, Aug. 2012, pp. 855-859.
- [5] T. Kohda, Y. Jitsumatsu, and K. Aihara, " Frequency-division spread spectrum makes frequency synchronisation easy, " *Proc. IEEE Globecom 2012*, Dec. 2012, pp. 3976-3982.

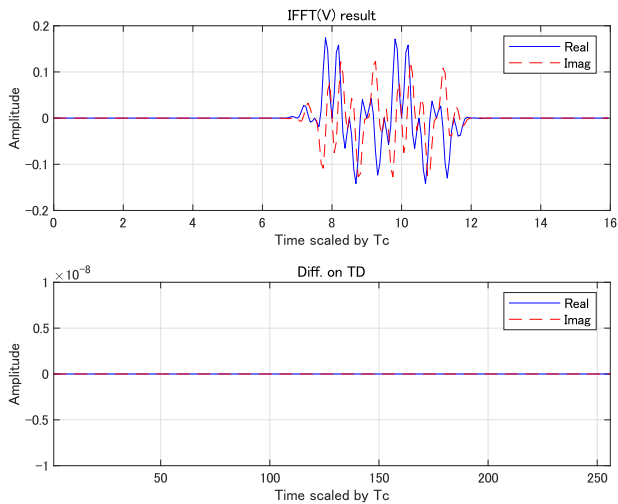


図 8:  $V[\ell; \mathcal{X}]$  に IFFT を掛けた結果 IFFT( $V$ ) (上図)、ならびに IFFT( $V$ ) と  $v[k; \mathcal{X}]$  との差分 (下図) .

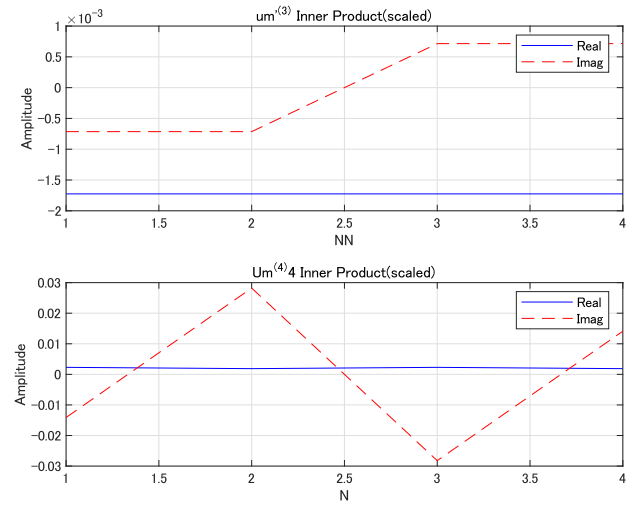


図 9: 干渉評価の結果 .

- [6] Y. Jitsumatsu, T. Kohda, and K. Aihara, "Delay-Doppler Space Division-based Multiple-Access Solves Multiple-Target Detection," 6th International Workshop on Multiple Access Communication, MACOM2013, Eds. by M.Jonsson, LNCS 8310, 39-53, (2013).
- [7] Y. Jitsumatsu, and T. Kohda, "Digital Phase updating Loop and Delay-Doppler Space Division Multiplexing for Higher Order MPSK," MACOM2014, LNCS 8715, ed. by M.Jonsson, et al. pp.1-15, 2014.
- [8] J. von Neumann, *The Geometry of Operators*, vol. II (*Ann. Math. Studies*, no. 22), 1950.

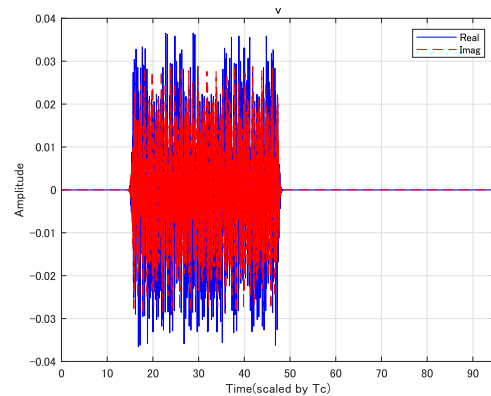


図 10:  $L = 4096, N = N' = 32$  の TD 波形 .

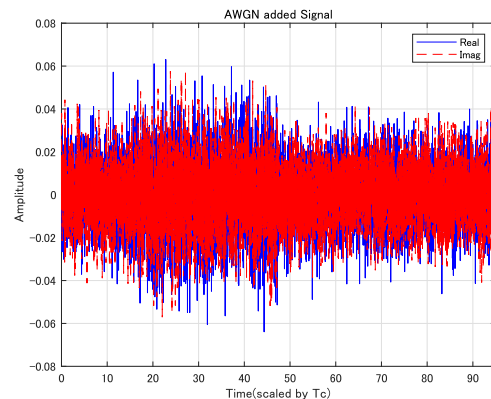


図 11: 図 10 に  $S/N = -5\text{dB}$  の AWGN 雑音があわったベースバンド信号 .